Structuri algebrice (I) (Teste grilă 2020)

13.03.2021
TODEA C.-C.

$(A, *)$ structură algebrică, adică $\exists\ F: A \times A \longrightarrow A$ $\quad x * y = F(x, y)\ \forall x, y \in A$

$*$ ⟶ „lege de compoziție” sau „operație binară”

$\boxed{1}$ Structuri algebrice ale mulțimilor cunoscute:

a) Grupuri $(G, \circ)$
- G parte stabilă în raport „$\circ$”
- asociativitate;
- $\exists$ element neutru (notăm e_G sau e)

(primele trei proprietăți: Monoid)

- $\forall x \in G\ \exists x' \in G$ (numit simetricul lui x) a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e_G$

(Notație $(G, \cdot)$
- elem. n. $e \overset{not}{=} 1$
- simetricul (invers) ⟶ x^{-1})

b) <u>Inele</u> $(I, +, \cdot)$ a.î.

- $(I, +)$ grup <u>comutativ</u> $\left(x+y = y+x \quad \forall x, y \in I\right)$
- $(I, \cdot)$ monoid
- distributivitatea „$\cdot$" față de „$+$"

c) <u>Corpuri</u> $(K, +, \cdot)$

- $(K, +)$ grup comutativ $\rightarrow$ (element neutru $e_K = 0$)
- $(K^*, \cdot)$ grup $\quad K^* = K \setminus \{0\}$
- distributivitate

<u>Exemple:</u> a) $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$ grupuri comutative

- ✓
- ✓
- 0
- simetricul lui $a \in \mathbb{R} \longrightarrow -a$

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$; $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; $((0, \infty), \cdot)$ —"—

! $((-1, 1), \circ)$ $\quad x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ —"— !

Întrebări: $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ este grup? NU deoarece $2^{-1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

$\hookrightarrow$ monoid

$([-1, 1], \cdot)$ este grup? NU $0 \in [-1, 1]$ $0^{-1} = \frac{1}{0}$ nu există;

$\hookrightarrow$ „înmulțirea"

b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$; $(M_n(K), +, \cdot)$; $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

c) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; $(\mathbb{C}, +, \cdot)$; $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ p prim

$\hookrightarrow$ „corpul claselor de resturi modulo p"

2 Structură algebrică indusă pe o altă mulțime

„copiere de structură"

Observație Fie G o mulțime și H altă mulțime a.î. $|G| = |H|$ (cardinale egale)

($\Longleftrightarrow \exists\, f: G \to H$ o funcție bijectivă)

- Fie $(G, \circ)$ structură algebrică dată (monoid sau grup) și $f: G \to H$ o funcție bijectivă (deci $\exists\, f^{-1}: H \to G$ iar $|H| = |G|$)

Atunci $\exists$ o unică operație „$*$" definită pe H a.î. $(H, *)$ devine o structură izomorfă cu $(G, \circ)$, iar $f: G \to H$ este morfism:

$$\boxed{f(x \circ y) = \underbrace{f(x)}_{u} * \underbrace{f(y)}_{v},\ \forall x, y \in G} \Rightarrow$$

$$\boxed{u * v = f\left(f^{-1}(u) \circ f^{-1}(v)\right),\ \forall u, v \in H}$$

f morfism $\Longrightarrow$ $f(\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ ori}}) = \underbrace{f(x) * f(x) * \ldots * f(x)}_{n \text{ ori}}$

f morfism de grupuri $\Longrightarrow$ $f(e_G) = e_H$

$f(\underbrace{x'}_{\text{în } G}) = \underbrace{(f(x))'}_{\text{în } H}$ $\left(\text{în } (G, \cdot) \quad f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \right)$

• <u>Invers</u>, dacă $(H, *)$ este structura dată și $|H| = |G| \longrightarrow$

$\exists!$ operație „$\circ$" a.î. $f : (G, \circ) \longrightarrow (H, *)$ este izomorfism

$$\boxed{x \circ y = f^{-1}(f(x) * f(y)) \quad \forall x, y \in G}$$

$$(G, \circ) \overset{f}{\cong} (H, *)$$

$T.A. =$ temă acasă

Exemple:

① $(G, \circ) = (\mathbb{R}, +)$ grup și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$

($(G,\circ)$, $(H,*)$)

Știm că f este bijectivă și $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f^{-1}(u) = \frac{u-b}{a}$ (T.A.)

$\Longrightarrow$ f induce pe $\mathbb{R}$ operația „$*$" dată de

$$u * v = f(f^{-1}(u) \circ f^{-1}(v)) = f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v))$$

$$= f\left(\frac{u-b}{a} + \frac{v-b}{a}\right) = f\left(\frac{u+v-2b}{a}\right)$$

$$= \cancel{a} \cdot \frac{u+v-2b}{\cancel{a}} + b = u + v - 2b + b$$

$$= u + v - b \Longrightarrow u * v = u + v - b$$

$(\mathbb{R}, +) \overset{f}{\cong} (\mathbb{R}, *)$, $u * v = u + v - b$.

Pb 199 Se dau $(\mathbb{R},+)$ și $(\mathbb{R},*)$, $x*y = x+y+1$. Se dă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$. Se cer $a,b=?$ a.î. f să fie izomorfism.

Soluție

MI „clasic" f izomorfism $\Longrightarrow$ f bijectivă $\Longrightarrow$ $\boxed{a\neq 0}$

$\Longrightarrow$ f morfism $\Longrightarrow$ $f(x+y) = f(x)*f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$$\Longrightarrow a(x+y)+b = \underbrace{(ax+b)}_{u} * \underbrace{(ay+b)}_{v}$$

$$\Longrightarrow ax+ay+b = ax+b + ay+b+1$$

$$\Longrightarrow \cancel{ax}+\cancel{ay}+b = \cancel{ax}+\cancel{ay}+2b+1, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow -b = 1 \Longrightarrow \boxed{b=-1}$$

$f(x) = ax-1, \forall x\in\mathbb{R}$, cu $a\neq 0$ Verificare T.A.

$\underline{M_{II}}$ Conform ① $\Rightarrow$ $\underline{a \neq 0}$, $-b = 1 \Rightarrow \underline{b = -1}$,

$\underline{T.A}$: 205

② $(H, *) = ((0, \infty), \cdot)$ $\quad f : (-1, 1) \longrightarrow (0, \infty)$; $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ bijectivă

$(G, \circ) = ((-1, 1), \circ)$

Știm că $f^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow (-1, 1)$ $\quad f^{-1}(u) = \frac{u-1}{u+1}$ (T. A.)

Știm că $(H, *)$ e grup comutativ cu $\left\langle \begin{array}{l} e_H = 1 \\ u^{-1} = \frac{1}{u}, \ \forall u > 0 \end{array} \right.$

Atunci $\forall x, y \in (-1, 1)$ $\quad x \circ y = f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) \Longrightarrow$

$$x \circ y = f^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y}\right) = f^{-1}\left(\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right) = \frac{\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} - 1}{\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} + 1} = \ldots = \frac{x+y}{1+xy}$$

Deci $\Big(\underbrace{(-1,1)}_{G}, \circ\Big) \overset{f}{\cong} \Big(\underbrace{(0,\infty)}_{H}, \cdot\Big)$, $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

$$e_G = f^{-1}(e_H) = f^{-1}(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

Pb 769 → 772   Se dă $(G, \circ)$, $G = (-1,1)$ și $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

Se cer: (a) e_G ; (b) $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{4} \circ \ldots \circ \frac{1}{10}$;

(c) $a, b = ?$ a.î. $f : (G, \circ) \longrightarrow ((0,\infty), \cdot)$ $f(x) = \dfrac{a+x}{b-x}$ să fie izomorfism.

Obs Este recomandat ca în astfel de probleme să începem cu aflarea lui f!

T.A: 806 − 808 Admitere 2018.

Soluție c) M_{I} „clasic" M_{II} Din discuția (2) ⟶ $\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}}$

(a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ $\quad f(e_G) = 1 \Longrightarrow e_G = f^{-1}(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$

(b) Fie $p = \frac{1}{2} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10} \Longrightarrow f(p) = f\left(\frac{1}{2} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10}\right) =$

$$= f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \cdot \dots \cdot \frac{1+\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} \cdot \dots \cdot \frac{\frac{11}{10}}{\frac{9}{10}} = \left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{7}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{9}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{7}}\right) \cdot \left(\frac{11}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{9}}\right)$$

$$= 11 \Rightarrow f(p) = 11 \Longrightarrow p = f^{-1}(11)$$

$$\Longrightarrow p = \frac{11-1}{11+1} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Longrightarrow$$

$$\boxed{p = \frac{5}{6}}$$

T.A. 233